Методические рекомендации по решению уравнений с вычислением интегралов с особенностями

Задача. Для заданной точности ε и различных значений параметра α найти все решения нелинейного уравнения, содержащего интегралы с особенностями. Например,

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt = \alpha, \quad \text{или} \quad \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{1+t^6}}\,dt = \alpha, \quad \text{или нечто аналогичное}$$

1. Следует сразу заметить, что данные уравнения могут не иметь решений при некоторых α. Поэтому сначала нужно прояснить этот вопрос и определить при каких α можно решать эту задачу. Обычно для этого нужно определить максимальное и минимальное значения соответствующей функции. Задачи подбираются так, чтобы интегралы по возможности не брались в элементарых функциях, поэтому эти экстремумы будут выражаться через некоторые интегральные выражения, которые потом придется предварительно тоже подсчитать численно. Например, интеграл в первом уравнении является сходящимся и соответственно имеет ограничесное множество значений при разных x.

2. Уравнения можно решать методом биссекции или Ньютона. Причем в случае интегралов с переменными пределами производная легко вычисляется через подинтегральную функцию, т.е. метод Ньютона реализуется достаточно легко.

3. Нужно быть готовым к тому, что задача может не решаться единообразно сразу для всех возможных значений α. То есть в окончательной программе могут быть предусмотрены развилки, вызывающие разные модификации алгоритма в зависимости от поступающих значений α.

4. Любой метод решения уравнения предполагает многократное вычисление функции уравнения, т.е. многократное вычисление интегралов с разными пределами интегрирования. Здесь есть несколько приемов, которые необходимо реализовать для правильного процесса вычислений.
— устранение "особенностей" и/или слишком длинных отрезков интегрирования
— применение квадратурных формул с автоматическим выбором текущего шага интегрирования
— использование аддитивности определенного интеграла
— общий контроль точности решения

Теперь рассмотрим приемы, упомянутые в п.4.

Устранение "особенностей" и/или длинных отрезков интегрирования. Возьмем для определенности первый вариант задания. Видно, что данная функция имеет особенность в окрестности точки $x = -1$, т.е. подинтегральная функция в окрестности -1 стремится к бесконечности, что вызывает проблемы в применении квадратурных формул. Тем не менее, это сходящийся несобственный интегра, как в окрестности точки -1 так и на бесконечности, т.е. мы его должны уметь как-то вычислять. При $x \to \infty$ подинтегральная функция стремится к $\frac{1}{t^{3/2}}$, т.е. интеграл тоже сходится, и соответственно решение существует не при всех α. Но при некоторых α близких к значению несобственного интеграла мы рискуем получить очень длинный отрезок интегрирования.

Обе эти проблемы решаются выделением особенностей по их асимптотике. Во-первых, разберем как меняется знак функции. При $x > 0$ и $x < -1$ левая часть уравнения положительна, т.е., возможно, для некоторых положительных α мы будем иметь два корня. Для $-1 \le x \le 0$ левая часть отрицательна и меняется монотонно, поэтому здесь будет один корень.

Рассмотрим случай $x > 0$. Здесь мы имеем несобственный интеграл на бесконечности. При этом подинтегральная функция выходит на асимптоту $x^{-3/2}$. Используя этот факт, мы можем изюавиться от интегрирования по очень большому отрезку. Итак, предположим, что нам надо вычислить интеграл $\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$ с заданной точностью ε для очень большого положительного x. Разобъем интеграл на два:

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt = \int\limits_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt + \int\limits_A^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$$

где $0 < A < x$ — некоторое число, которое мы сейчас подберем, и заменим подинтегральную функцию во втором интеграле на ее асимптотику

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt = \int\limits_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt + \int\limits_A^x t^{-3/2}\,dt + R(A),$$

где $R(A)$ есть погрешность, получившаяся при замене функции на ее асимптотику. Второй интеграл теперь вычисляется по явным формулам, и нам нужно как-то охарактеризовать погрешность. Имеем

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt = \int\limits_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt + \frac{2}{5}(A^{-5/2} - x^{-5/2}) + R(A),$$

Идея состоит в том, что теперь интеграл в левой части вычисляется с помощью квадратурных формул на ограниченном отрезке $[0,A]$ плюс добавок по явным формулам, а погрешность при этом складывается из погрешности вычисления на отрезке $[0,A]$ плюс величина $R(A)$. Оценим величину $R(A)$

$$R(A)=\int\limits_A^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt-\int\limits_A^x t^{-3/2}\,dt=\int\limits_A^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}-\frac{1}{\sqrt{t^3}}\right)\,dt=\int\limits_A^x \left(\frac{\sqrt{t^3}-\sqrt{1+t^3}}{\sqrt{1+t^3}\sqrt{t^3}}\right)\,dt$$

$$=\int\limits_A^x \left(\frac{-1}{(\sqrt{t^3}+\sqrt{1+t^3})\sqrt{1+t^3}\sqrt{t^3}}\right)\,dt\approx\int\limits_A^x \left(\frac{-1}{2\sqrt{t^3}\sqrt{t^3}\sqrt{t^3}}\right)\,dt=\int\limits_A^x \left(\frac{-1}{2\sqrt{t^9}}\right)\,dt$$

Итак,

$$|R(A)|\approx\frac{1}{2}\int\limits_A^x t^{-9/2}\,dt<\frac{1}{2}\int\limits_A^\infty t^{-9/2}\,dt=\frac{1}{11}A^{-11/2}.$$

Теперь мы можем выбрать A, исходя из требуемой точности. Предположим, что точность $\varepsilon=10^{-8}$. Тогда половину этой точности можно отнести к погрешности квадратурной формулы на отрезке $[0,A]$ и половину на величину $R(A)$, т.е. должно быть $|R(A)|<\frac{1}{11}A^{-11/2}\le 0.5\cdot 10^{-8}$. Из последнего неравенства можно найти условие на A, т.е. $A\ge (5.5\cdot 10^{-8})^{-2/11}\approx 0.74\cdot 28.18\approx 21$. На самом деле нет необходимости вычислять подобные границы совсем уж точно. Достаточно взять хоть какое-то разумное A, удовлетворяющее требуемому неравенству. Например, здесь легко увидеть, что $A=100$ вполне подходит к неравенству, и интегрирование по отрезку длины 100 также не представляет трудностей. Теперь мы можем вычислять интеграл от 0 до x либо целиком по квадратурной формуле, если $x<A$, либо просто по явной формуле, если $x\ge A$, поскольку в этом последнем случае интеграл в пределах от 0 до A является константой и может быть вычислен с треубемой точностью заранее.

Для устранения особенности интегрирования в отдельной точке (несобственный интеграл второго рода) можно применить точно такой же прием — выделение явно интегрируемой асимтотики. В нашем случае это точка -1. Рассмотрим интегрирование в окрестности этой точки. Возьмем для определенности интеграл в пределах от 0 до x при $-1\le x<0$ и точно также, учитывая что $1+t^3=(1+t)(1-t+t^2)$, представим его в виде суммы интегралов

$$\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt=\int\limits_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt+\int\limits_A^x \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+t}}\,dt+R(A),$$

где второй интеграл в правой части интегрируется явно, а

$$R(A)=\int\limits_A^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}-\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1+t}}\right)\,dt=\int\limits_A^x \frac{1}{\sqrt{1+t}}\left(\frac{(1+t)(2-t)}{\sqrt{3}\sqrt{1-t+t^2}(\sqrt{3}+\sqrt{1-t+t^2})}\right)\,dt\approx\int\limits_A^x C\sqrt{1+t}\,dx,$$

где $C=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ и последнее приближенное равенство получено в прелдположении, что x близко к -1 (т.е. вынесли множитель $(1+t)$, а в оставшееся выражение подставили -1). Теперь так же как и раньше можно оценить величину $R(A)$, расширив пределы интегрирования вплоть до -1 и оценив (вычислив) полученный интеграл явно). Это даст необходимое соотноления между A и ε для требуемой погрешности вычислений. Теперь в интервале от 0 до $x>A$ мы можем применять квадратурную формулу, а в интервале $-1\le x\le A$ вычислять интеграл по полученным явням формулам.

Итак, вычисление несобственных интегралов может проводиться выделением особсенностей с использованием асимптотик и оценок вносимой погрешности.

Применение квадратурных формул с автоматическим выбором текущего шага интегрирования. В предыдущих задачах на численное интегрирование применялся подбор шага интегрирования удвоением количества узлов для достижения требуемой погрешности вычислений. Однако в тех примерах предполагалось, что сам шаг h сетки разбиения области интегрирования остается постоянным на всей области. Такой подход обеспечивает точность, но во многих случаях является избыточным так как погрешность численного интерирования имеет локальный характер и зависит от поведения функции в отдельных частях отрезка интегрирования. Например, если функция достаточно гладкая в одной области и резко меняется в другой области, то метод удвоения количества точек будет измельчать сетку в обоих частях (так как надо достигнуть точности в области резкого изменения функции), хотя в области, где функция гладкая, было бы достаточно и меньшего количества точек сетки.

Учет локального характера погрешности интегрирования приводит к модификации алгоритма интегрирования с автоматическим выбором текущего шага сетки, где шаг разбиения области интегрирования на элементарные отрезки меняется автоматически в зависимости от гладкости интегрируемой функции. Рассмотрим этот алгоритм на примере какого-либо метода с разбиением на подотрезки (трапеций, Симпсона и т.п.). Пусть мы должны вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Мы разбиваем отрезок $[a,b]$ на частичные подотрезки и на каждом подотрезке применяем квадратурную формулу. Вопрос в том как выбрать шаги разбиения. Предположим, что мы уже вычислили часть интеграла проведя разбиение $[a,b]$ до некоторой точки $x_i\in[a,b]$, теперь нам надо определить следующую точку x_{i+1}, чтобы применить квадратуру на подотрезке $[x_i,x_{i+1}]$.

Обозначим через $I(x_i, x_{i+1})$ результат приближенного вычисления интеграла на подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$ по заданой квадратурной формуле. Пусть мы имеем некоторый текущий шаг разбиения h и приближенное значение интеграла S, вычисленное вплоть до точки x_i. Алгоритм выглядит так:

1. Положим $x_{i+1} = x_i + h$, $x_{i+1/2} = x_i + h/2$.
2. Вычислим $I_1 = I(x_i, x_{i+1})$ и $I_2 = I(x_i, x_{i+1/2}) + I(x_{i+1/2}, x_{i+1})$.
3. Проверим неравенство $|I_1 - I_2| < \delta$, где выбор δ будет описан ниже.
4. Если неравенство п.3 выполнено, то полагаем $S = S + I_2$, и интеграл теперь вычислен до точки x_{i+1}. Если нет, то полагаем $h = h/2$ и переходим к п.1.

Таким образом, вычисление интеграла послепенно продвигается от точки a к точке b, при этом каждый раз выполняется проба с вычислением на один шаг и два полушага со сравнением этих двух результатов и уменьшением шага в два раза, если результаты этих двух проб сильно расходятся.

Естественно, следует аккуратно проводить пробы в конце интервала, чтобы новое значение x_{i+1} не перескочило через точку b.

Мы можем начинать вычисления с некоторого разумного значения h в зависимости от особенностей задачи. Например, брать $h = 0.1$ или $h = (b-a)/10$ и т.п. Далее h будет модифицироваться (уменьшаться), если проверка локальной погрешности этого потребует. Однако в такой логике есть дефект. При ухудшении свойств гладкости подинтегральной функции шаг разбиения будет уменьшаться, но если потом функция опять станет гладкой, шаг не увеличится, он останется маленьким и, следовательно, избыточным. Таким образом, надо его увеличивать, если погрешность (разница двух проб) слишком мала. Теперь пп.3–4 алгоритма можно переписать так

3. Проверим неравенства $\delta_2 < |I_1 - I_2| < \delta_1$, где выбор δ_1, δ_2 будет описан ниже.
4. Если неравенство п.3 выполнено для δ_1, то полагаем $S = S + I_2$, и интеграл теперь вычислен до точки x_{i+1}. Если нет, то полагаем $h = h/2$ и переходим к п.1. Если, кроме того, нарушается неравенство п.3 для δ_2, то для следующего разбиения полагаем $h = 2h$.

Теперь шаг разбиения будет уменьшаться при ухудшении гладкости подинтегральной функции и увеличиваться, при улучшении ее гладкости.

Рассмотрим теперь выбор δ_1, δ_2. Как следует из теории методов численного интегрирования, δ_1 есть оценка погрешности на данном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, т.е. погрешность на всем отрезке интегрирования есть сумма δ_1 по всем частичным отрезкам. Для оценки погрешности на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ длины $h_i = x_{i+1} - x_i$ возьмем $\delta_1 = \frac{\varepsilon h_i}{b-a}$, где ε — требуемая точность вычисления всего интеграла. Тогда сумма δ_1 по всем подотрезкам раюдиентя будет как раз равна ε.

Параметр δ_2 отвечает за увaличение шага. Если брать δ_2 очень маленьким, то увеличение шага будет слишком "инерционным", т.е. шаг не булет увеличиваться пока функци не станет совсем уж гладкой. Если брать его близко к δ_1, то метод может начать "прыгать", т.е., увеличение шага на предыдущем отрезке может оказаться уже плохим для следующего, и метод будет выгужден опять его уменьшать. Как правило, его этот параметр разумно брать на порядок меньше δ_1, т.е. $\delta_2 = \delta_1/10$.

продолжение следует ...