

## Тема 6. Множества и хеширование

### Хеширование

Быстрые деревья предоставляют средства для реализации множеств и отображений.

Множество здесь понимается как контейнерная структура данных, которая поддерживает следующие операции:

первичные:

- добавить элемент
- удалить элемент
- искать элемент (принадлежность)
- итератор по элементам

вторичные:

- объединение, пересечение, дополнение и т.д. как для математических множеств

Таким образом, мы можем реализовать множества на быстрых деревьях с трудоемкостью первичных операций  $O(\log N)$ , правда, при условии, что на множестве элементов определена операция сравнения “меньше”.

Два вопроса:

- а что, если сравнения на “меньше” нет ?
- а нельзя ли работать быстрее, чем  $O(\log N)$  ?

**Ответы:** при некоторых допущениях, такие реализации множеств возможны.

**Простой предварительный пример.** Битовое множество.

**Постановка задачи.** Нужно работать с подмножествами неотрицательных целых чисел. Известно ограничение на максимальное значение (диапазон) таких чисел.

**Идея реализации.** Возьмем массив целых чисел и каждый бит элементов этого массива сопоставим с некоторым числом из полного диапазона. Если некоторое число содержится в подмножестве, то бит устанавливаем в 1, иначе в 0.

```
class BitSet
{
    unsigned int *bitElems; // массив для хранения битов
    int maxVal; // ограничение на максимальное значение

    bool Test(int k) { return (0 <= k && k <= maxVal); }

#define bits_in_elem 32
#define indElem(k) ((k)/bits_in_elem)
#define indBit(k) ((k)%bits_in_elem)
// по-хорошему, здесь лучше битовыми операциями k>>5 k & 0x1F

public:
    BitSet(int mVal);
    // другие конструкторы, если надо

    ~BitSet() { delete[] bitElems; }

    // надо еще проверять попадание в заданный диапазон !!!
    // добавить
```

```

void Set(unsigned k) { bitElems[indElem(k)] |= 1 << indBit(k); }

// удалить
void Clear(unsigned k) { bitElems[indElem(k)] &= ~(1 << indBit(k)); }

// принадлежит?
bool InSet(unsigned k) { return (bitElems[intElem(k)]) & (1 << indBit(k)); }
};

BitSet::BitSet(int mVal)
{
    maxVal = mVal;
    int size = indElem(maxVal) + 1;
    bitElems = new unsigned int[size];
    for (int i=0 i<size; i++) bitElems[i] = 0;    // memset
    // обработка отказа по памяти ....
}

```

А вот с итератором тут все не так радужно ... Придется посмотреть на каждый элемент массива.

Ограничение про `unsigned` легко устранить предварительным сдвигом в положительную область.

Несмотря на примитивность, такое множество может оказаться очень эффективным.

**Пример 1.** Решето Эратосфена для простых чисел.

Максимальный `unsigned`  $\sim 2^{32} - 1$ .

количество элементов в `bitElems` —  $2^{27}$  целых или  $2^{29}$  байтов т.е. 512 М.

**Пример 2.** Система бронирования и продажи авиабилетов для Москвы дата-рейс-место — занято/свободно

Сколько таких записей для Москвы?

период — несколько месяцев (256 дней)  $2^8$

сколько рейсов

аэропортов  $2^2$

вылетов в день ( 1 в минуту)  $2^{10}$

мест в рейсе  $2^7$

итого  $2^{27}$  бит,  $2^{24}$  байтов — 16 М.

## Хеширование

Множество  $M$  всех возможных значений.

Множество  $m$ , с которым мы работаем  $|m| \ll |M|$ .

Hash function  $h(x) : M \rightarrow \{0, \dots, p-1\}$ .

Классы эквивалентности  $M_k = \{x \in M : h(x) = k\}$ .

Работу с  $x \in m$  сводим к работе с  $M_{h(x)}$ .

Все зависит от того, насколько хорошо хеш-функция рассеивает наше множество  $m$  по разным  $M_k$ .

Выбор хорошей хеш-функции для конкретной задачи — это отдельная наука.

Примеры хеш-функций и их выбор чуть позже.

**Пример:** метод списков (подмножеств).

Хеш-таблица указателей на подмножества (например, списки, деревья и т.п.) Эффективность напрямую зависит от качества хеш функции.

**Пример:** метод проб.

Хеш-таблица элементов (`tab[]`). Размер таблицы с заметным запасом по количеству. Идеология работы с при поиске или добавлении.

$k = h(x)$

проверка `tab[k]`

при неудаче проверка `tab[k + 1]`

при неудаче проверка `tab[k + 2]`

и т.д. циклически, пока не найдем

Идеология работы с при удалении.

$k = h(x)$

далее поиск

если нашли на месте `tab[s]` и цепочка продолжается, то перенос в `tab[s]` первого подходящего элемента `tab[r]` из цепочки ( $h(tab[r]) \leq s$ ) и т.д. с  $s = r$ , либо прерываем цепочку в позиции `s`, если подходящего элемента нет.

**Теорема.** Пусть в методе проб коэффициент заполнения хеш таблицы есть  $s = m/n$ , где  $n$  — размер таблицы,  $m$  — количество занятых ячеек (мощность рабочего множества). Пусть хеш функция обеспечивает равномерное распределение элементов рабочего множества по позициям в таблице. Тогда среднее число проб при работе с множеством (при поиске, добавлении, удалении) составляет  $1/(1 - s)$ .

**Следствие.** Если хеш таблица заполнена наполовину, то среднее число проб есть 2 независимо от фактического количества элементов в рабочем множестве.

**Доказательство.** Вероятность попасть на занятую ячейку есть  $s_1 = s$ , на незанятую —  $(1 - s_1)$ .

При второй пробе эти вероятности есть  $s_2 = (m - 1)/(n - 1)$  и  $(1 - s_2)$ .

Для третьей пробы  $s_3 = (m - 2)/(n - 2)$  и  $(1 - s_3)$ .

Вероятность сделать ровно  $k$  проб есть

$q_k = s_1 s_2 \dots s_{k-1} (1 - s_k)$  ( $k - 1$  неудачных и последняя удачная)

Среднее число проб — это математическое ожидание  $\sum_{k=1}^m k q_k$ .

вычислим его

$$1(1 - s_1) + 2s_1(1 - s_2) + 3s_1s_2(1 - s_3) \dots =$$

$$= 1 + s_1 + s_1s_2 + s_1s_2s_3 + \dots < 1 + s_1 + s_1^2 \dots - (\text{геом. прогрессия}) \leq \frac{1}{1 - s}.$$

## Примеры хеш функций

```
int additive_hash (char *key, int len, int p)
{
    int k, hash = len;
    for (k=0;k<len;k++) hash += key[k];
    return hash % p;
}

int XOR_hash (char *key, int len, int p)
{
    int k, hash = 0;
    for (k=0;k<len;k++) hash ^= key[k];
}
```

```

    return hash % p;
}

```

Это две очень плохих функции. Более-менее сносно они работают только при достаточно длинных последовательностях байтов (несколько сотен).

```

int rotate_hash (char *key, int len, int p)
{
    int k, hash = len;
    for (k=0;k<len;k++)
        hash = (hash<<5)^(hash>>27)^key[k];
    return hash % p;
}

int elf_hash (char *key, int len, int p)
{
    int hash = 0;
    unsigned int k, g;
    for (k=0;k<len;k++) {
        hash = (hash<<4) + key[k];
        g = hash & 0xF0000000;
        if ( g ) hash ^= g>>24;
        hash &= ~g;
    }
    return hash % p;
}

```

Это представители перемешивающих функций. Перемешивание осуществляется путем сдвигов и наложений с помощью битовых операций. Константы подбираются обычно опытным путем.

Иногда возникает необходимость получить семейство различных хеш-функций со схожими характеристиками. В таких случаях используются функции со случайными таблицами. Идея достаточно проста — взять случайную таблицу с требуемыми значениями хеш-функции, а индекс в этой таблице вычислять также как некоторое хеш-значение. Вот два примера подобных функций.

```

char tab[256]; // заполняется случайными числами

char pearson_hash (char *key, int len, char *tab)
{
    int k, hash = 0;
    for (k=0;k<len;k++) hash = tab[hash^key[k]];
    return hash;
}

char CRC_hash (char *key, int len, int mask, char *tab)
{
    int k, hash = len;
    for (k=0;k<len;k++)
        hash = (hash<<8)^tab[(hash>>24)^key[k]];
    return hash & mask;
}

```

Еще одно семейство составляют полиномиальные функции. Значение вычисляется как некоторый полином, коэффициенты которого определяются входной последовательностью байтов. В следующих примерах легко увидеть схему Горнера для вычисления многочлена от аргумента, указанного в комментарии.

```
char djb2_hash (char *key, int len, int p)
{  int k, hash = 5381;    // аргумент = 33
  for (k=0;k<len;k++)
    hash = ((hash<<5) + hash) + key[k];
  return hash % p;
}
char java_hash (char *key, int len, int p)
{  int k, hash = 0;      // аргумент = 31
  for (k=0;k<len;k++)
    hash = ((hash<<5) - hash) + key[k];
  return hash % p;
}
char sdbm_hash (char *key, int len, int p)
{  int k, hash = 0;      // аргумент = 65599
  for (k=0;k<len;k++)
    hash = ((hash<<16) + (hash<<6) - hash) + key[k];
  return hash % p;
}
```

## Совершенные хеш-функции

**Задача:** построить оптимальную хеш-функцию для заданного набора входных значений, чтобы она не имела коллизий на данном наборе. В англоязычной литературе такие функции называются Perfect Hash Functions, мы будем использовать термин “совершенные”.

Пусть  $M$  — множество всех возможных элементов (ключей),  $m$  — подмножество заданных фиксированных ключей, с которым мы работаем.

**Определение:** Хеш-функция  $h(x)$  называется совершенной, если для любых  $x_1, x_2 \in M$ ,  $x_1 \neq x_2 \implies h(x_1) \neq h(x_2)$ .

**Определение:** Совершенная хеш-функция  $h(x)$  называется минимальной, если  $h : M \rightarrow \{0, \dots, |m| - 1\}$ .

**Определение:** Пусть на множестве ключей введено отношение порядка “ $<$ ”. Совершенная хеш-функция  $h(x)$  сохраняет порядок, если для любых  $x_1, x_2 \in M$ ,  $x_1 < x_2 \implies h(x_1) < h(x_2)$ .

Гарантированное построение минимальной совершенной хеш-функции представляет собой непростую задачу. Поэтому на практике обычно применяются итерационные или вероятностные подходы, которые позволяют получить результат после некоторого количества проб. Достаточно хорошо известен пакет gperf, разработанный в рамках проекта GNU. Но в нашем курсе мы разберем другой способ, основанный на вероятностных соображениях и позволяющий получить минимальную совершенную хеш-функцию, сохраняющую произвольный заранее заданный порядок.

Ищем функцию в виде  $h(x) = g(f_1(x)) + g(f_2(x))$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — хеш-функции на основе случайных таблиц, а  $g$  — некоторая функция, которую предстоит построить.

Выберем число  $n = c|m|$ , где  $c > 2$  — некоторая константа. Сгенерируем две случайные хеш-функции  $f_1$  и  $f_2$  с диапазонами значений  $\{0, \dots, n-1\}$ . Каждому ключу  $x$  поставим в соответствие пару  $(f_1(x), f_2(x))$ , и из этих пар, как из ребер, построим граф, склеивая вершины с одинаковыми значениями.

Нам хочется, чтобы в этом графе не было циклов. Используя вероятностные соображения, можно доказать, что вероятность отсутствия циклов в таком графе асимптотически равна  $p = \sqrt{\frac{c-2}{c}}$  при  $n = cm, n \rightarrow \infty$ .

Таким образом, если построенный граф содержит циклы, то мы его отбрасываем, генерируем новые случайные таблицы для функций  $f_1$  и  $f_2$ , и строим новый граф. Так как вероятность получить ациклический граф достаточно велика, то ожидаемое число попыток оценивается математическим ожиданием

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{c}{c-2}}$$

Если взять  $c = 3$ , то эта формула дает весьма оптимистичную оценку — в среднем не более двух попыток.

Иллюстрация: построение графа для конкретного набора значений

Из описанного построения становится ясно, зачем в графе не должно быть циклов. Действительно, если граф содержит цикл, то в общем случае возникающая цепочка значений не будет совместна. То есть вернувшись в начальную вершину цикла, мы можем получить для другое значение в этой вершине.

Отметим плюсы и минусы этого алгоритма. Трудоемкость построения хеш-функции невелика, причем самая сложная часть — проверка графа на цикличность. Однако при реализации требуется память для хранения таблиц хеш-функций. Эта память составляет  $c|m|$  для задания функции  $g$  и две таблицы, определяющие функции  $f_1$  и  $f_2$  (обычно для каждой используется таблица на 256 значений — по количеству различных байтов). Кроме этого, требуется хранить и сами заданные ключи, так как если для некоторого  $x$  имеем  $h(x) \in \{0, \dots, |m| - 1\}$ , то это еще не означает, что  $x \in M$ .

Замечание о криптографических хеш-функциях. Но это отдельная наука.